**ЧЕТНОЕ И НЕЧЕТНОЕ ЧИСЛО**

Обычно четные и нечетные числа связывают только с натуральными числами. Здесь мы распространим их на любые целые числа.

Целое число называется четным, если оно делится на 2, и нечетным, если оно на 2 не делится.

Например, число 6 -- четное, число 0 -- четное, 5 -- нечетное, число --1 -- тоже.

Любое четное число можно представить в виде 2а, а любое нечетное -- в виде 2а + 1 (или 2а - 1), где число а -- целое.

Два целых числа называются числами одинаковой четности, если оба они четные или оба нечетные. Два целых числа называются числами разной четности, если одно из них четное, а другое нечетное.

Рассмотрим свойства четных и нечетных чисел, важные для решения задач.

1. Если хотя бы один множитель произведения двух (или нескольких) чисел четен, то и все произведение четно.

2. Если каждый множитель произведения двух (или нескольких) чисел нечетен, то и все произведение нечетно.

3. Сумма любого количества четных чисел -- число четное.

4. Сумма четного и нечетного чисел -- число нечетное.

5. Сумма любого количества нечетных чисел -- число четное, если число слагаемых четно, и нечетное, если число слагаемых нечетно.

***Пример***

*В пятиэтажном доме с четырьмя подъездами подсчитали число жителей на каждом этаже и, кроме того, в каждом подъезде. Могут ли все полученные 9 чисел быть нечетными?*

Обозначим число жителей на этажах соответственно через a1,a2,a3,а4,a5, a число жителей в подъездах соответственно через b1,b2,b3,b4. Тогда общее число жителей дома можно подсчитать двумя способами -- по этажам и по подъездам: а1 + а2 + а3 + а4+ а5 = b1 + b2+ b3 + b4.

Если бы все эти 9 чисел были нечетными, то сумма в левой части записанного равенства была бы нечетной, а сумма в правой части -- четной. Следовательно, это невозможно.

Ответ: не могут

**Задачи**

1.Можно ли число 1 представить в виде суммы + + + , где *a, b, c, d*--натуральные числа?

Ответ:

Нельзя

2.Найдите все целые *p* и *q* при которых трехчлен *f(x)=x2+px+q* принимает при всех целых *х*: а) четные б) нечетные значения.

Ответ:

а) *p* нечетно *q* четно б) *p* и *q* нечетно

3. Дано 125 чисел, каждое из которых равно 1 или 3. Можно ли их разбить на

две группы так, чтобы суммы чисел, входящих в каждую группу, были равны?

Ответ:

Нельз

4.Страницы книги пронумерованы подряд, от первой до последней. Гриша вырвал из разных мест книги 15 листов и сложил номера всех 30 вырванных страниц. У него получилось число 800. Когда он сказал об этом Мише, тот заявил, что Гриша при подсчете ошибся. Почему Миша прав?

Ответ:

Сумма номеров всех страниц нечетна

5.По кругу сцепили несколько шестеренок. Смогут ли они одновременно

вращаться, если их: а) 5; б) 6?

Ответ:

а) не смогут б) смогут

6. В шести коробках лежат шарики: в первой -- 1, во второй -- 2, в третьей -- 3, в четвертой -- 4, в пятой -- 5, в шестой -- 6. За один ход разрешается в любые две коробки прибавить по одному шарику. Можно ли за несколько ходов уравнять количество шариков во всех коробках?

Ответ:

Нельзя

7.Числа *a* и *b* нечетные. Каким будет число *a2+b+1*?

Ответ:

Нечетное

8.Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку (длина прыжка 1 м). Докажите, что он сделал четное число прыжков.

Ответ:

Поскольку кузнечик вернулся в исходную точку, количество прыжков вправо равно количеству прыжков влево, поэтому общее количество прыжков четно.

9.Существует ли замкнутая 7-звенная ломаная, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз?

Ответ:

Не существует

10.Петя купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал все ее страницы от 1 до 192. Его младший брат вырвал из тетради все листы и разбросал по комнате. Петя подобрал наугад с пола 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 2006?

Ответ:

Нет

11.Сколько существует четырехзначных чисел, не делящихся на 1000, у которых первая и последняя цифры четны?

Ответ:

1996

12. Можно ли разменять 125 рублей при помощи 50 купюр достоинствами 1, 3, и 5 рублей?

Ответ:

Нельзя

13.Вдоль забора растут 8 кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 225 ягод?

Ответ:

Нет

14. Можно ли выпуклый 13-угольник разрезать на параллелограмм?

Ответ:

Нельзя

15. Сумма нескольких последовательных четных чисел ровна 100. Найти эти числа.

Ответ:

22+24+26+28=100, 16+18+20+22+24=100

**ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ**

Вспомним известное из школьного курса математики определение: говорят, что целое число а делится на целое число b, не равное нулю, если существует такое целое число m, что а = bm.

Число а называется делимым, число b -- делителем, число m -- частным. В этом случае говорят также, что число а кратно числу b. Тот факт, что число а делится на число b, будем обозначать так: аb.

А теперь вспомним признаки делимости натуральных чисел:

-делимость натурального числа на 2 равносильна тому, что его последняя цифра четная;

-делимость натурального числа на 5равносильна тому, что его последняя цифра -- 0 или 5;

-делимость натурального числа на 10 равносильна тому, что оно оканчивается цифрой 0;

-делимость натурального числа на 25 равносильна делимости на 25 числа, образованного двумя его последними цифрами;

-остаток от деления натурального числа на 3 (на 9) совпадает с остатком от деления суммы его цифр на 3 (на 9);

-делимость натурального числа на 4равносильна делимости на 4 числа, образованного двумя его последними цифрами;

-делимость натурального числа на 8равносильна делимости на 8 числа, образованного тремя его последними цифрами;

-делимость натурального числа на 11 равносильна делимости на 11 разности между суммой его цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах (другими словами, делимости на 11 знакочередующейся суммы всех его цифр).

***Пример***

*К числу 43 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное четырехзначное число делилось на 45. Найдите все решения.*

Обозначим неизвестные цифры через а и b. Тогда четырехзначное число можно записать в виде.

По признаку делимости на 5 b = 0 или b = 5. Рассмотрим оба случая.

1) Пусть 6 = 0. Полученное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр, равная а + 7, делится на 9. Отсюда а =2.

2) Пусть b = 5. Аналогично находим, что а = 6.

Ответ:

четырехзначное число равно 2430 или 6435

**Задачи**

1.Найдите все значения цифр, обозначенных звездочками, если число 4•8•2 делится на 88.

Ответ:

0,3 или 7,7

2.Найдите все значения цифр х и у, при которых число делится на 198.

Ответ:

х=1, у=0

3.Из натурального числа вычли сумму его цифр, а затем у полученной разности вычеркнули одну цифру. Сумма оставшихся цифр разности равна 131. Какую цифру вычеркнули?

Ответ:

4

4. У трехзначного числа, делящегося на 45, разность между второй и первой цифрами равна разности между третьей и второй. Найдите все такие трехзначные числа.

Ответ:

135, 630 или 765

5.Найдите все трехзначные числа, делящиеся на 11, у которых сумма цифр делится на 11.

Ответ:

209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902

6.Найдите все значения цифр а и b, при которых число делится на 99.

Ответ:

a=9, b=4

7.Найдите все значения цифры а, если число делится на 11.

Ответ: 4

8.Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается одинаковыми цифрами и делится на 18.

Ответ:

666

9.Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается

одинаковыми цифрами и делится на: а) 72, б) 693.

Ответ:

а) 888888888 б) 333333

10.Пятизначное число делится на 72, причем три его цифры -- единицы.

Найдите все такие числа.

Ответ:

41112, 14112, 11016, 11160

11.Пятизначное число делится на 315, причем три его цифры -- четверки.

Найдите все такие числа.

Ответ:

44415

12.Найдите значения х и у в числе 12х3у4, если оно кратно 599.

Ответ:

х=9, у=8

13.Какие две цифры можно приписать к числу 1313 справа, чтобы полученное шестизначное число делилось на 53?

Ответ:

5, 4 или 8, 7

14.Найти наименьшее натуральное число вида n3+3n2-4, делящееся на 19.

Ответ:

192•16=5776

15.Сколько существует двузначных чисел, делящихся на произведение своих цифр?

Ответ:

5 чисел: 11, 12, 24, 36, 15

**ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ**

При решении многих задач на делимость деление с остатком используется часто.

Теорема о делении с остатком читается следующим образом.

*Для любых натуральных чисел а и b существует, и притом единственная, такая пара целых неотрицательных чисел q и r, где r<b, что a = bq + r.*(1)

При этом число а называется делимым, b -- делителем, q -- частным (неполным частным), г -- остатком.

В случае, когда натуральное число a делится на натуральное число b:

a = bq (qN), (2) можно считать, что получилось равенство вида (1), когда г = 0, т. е. равенство (2) -- частный случай равенства (1).

Сформулируем равенство (1) словами: *делимое равно произведению делителя на частное, сложенному с остатком.*

***Пример 1.***

Найдите все натуральные числа, при делении которых на 6 в частном получится то же число, что и в остатке.

Обозначим искомое число через а, частное и одновременно остаток через q. Тогда а = 6q + q = 7q.

Казалось бы, ответом являются все натуральные числа, делящиеся на 7. Однако это не так, поскольку остаток q должен удовлетворять неравенству

0 < q < 6. Полагая q = 1, 2, 3, 4 и 5, находим все возможные значения а.

Ответ:

7, 14,21,28,35

***Пример 2.***

*Докажите, что два различных натуральных числа при делении на их*

*разность дают одинаковые остатки.*

Обозначим эти числа через а и b, где а > b. Тогда

a = (a-b)q1+r1

b = (a-b)q2 + r2

Вычтем почленно эти равенства: a-b=(a-b) (q1-q2)+(r1-r2)

Отсюда разность r1- г2делится на a-b.

Но r1< a-b, r2< a-b, поэтому разность г1- г2 по модулю меньше а-b. Следовательно, она может делиться на а-b только в одном случае, когда г1-г2 = 0, г1=г2.

**Задачи**

1.При делении натурального числа а на 2 в остатке получается 1, а при делении на 3 -- остаток 2. Какой остаток получится при делении а на 6?

Ответ:

5

2. Натуральное число n при делении на 6 дает остаток 4, а при делении на 15 -- остаток 7. Найдите остаток отделения n на 30.

Ответ:

22

3. Натуральное число а -- четное, не делящееся на 4. Найдите остаток от деления а2 на 32.

Ответ:

4

4. Какой остаток дает 51000 при делении на 11?

Ответ:

1

5. Чему равен остаток от деления числа на 6?

Ответ:

5

6. Найдите остаток от деления: а) 21000 на5; б) З128 на 11; в) 493 на 13.

Ответ:

а) 1 б) 5 в) 12

7.Найдите остаток от деления 2003•2004•2005+20063 на 7.

Ответ:

0

8.Найдите остаток от деления 9100 на 8.

Ответ:

1

9.При делении чисел 1108, 1453, 1844 и 2281на натуральное число а получится один и тот же остаток. Найти все значения а.

Ответ:

23

10.Если числа 826 и 4373 разделить на одно и тоже натуральное число, то получатся соответственно остатки 7 и 8. Найти все значения делителя.

Ответ:

9

11.Частное от деления трехзначного числа на сумму его цифр равно 13, а остаток 15. Найти все такие трехзначные числа.

Ответ:

106, 145, 184

12.Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 1997 дает в остатке 97, а при делении на 1998--остаток 98.

Ответ:

3988106

13.Четырехзначчное число делится на 7 и 29. После умножения на 19 и деления нового числа на 37 получится остаток 3. Найти все такие четырехзначные числа.

Ответ: 5075

14.Двузначное число при делении на цифру единиц дает в частном цифру единиц, а в остатке цифру десятков. Найти все такие двузначные числа.

Ответ:

89

15.Когда трехзначное число, у которого две первые цифры одинаковые, а третья равна 2, разделили на однозначное число, то в остатке получили 8. Найти делимое, делитель и частное. Укажите все решения.

Ответ:

332, 9, 36

**Олимпиадные задачи «Теория чисел»**

**Задача 1.** Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов.
Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет?

**Задача 2.** Наибольший общий делитель (НОД) натуральных чисел m и n равен 1. Каково наибольшее возможное значение НОД чисел m+2000n и n+2000m?

**Задача 3.** Докажите, что произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.

**Задача 4.** Найдите все натуральные  *n* > 1,  для которых  *n*3 – 3  делится на  *n* – 1.

**Задача 5.** Докажите, что любое натуральное число, десятичная запись которого состоит из 3*-х*  одинаковых цифр, делится на 37.

**Задача 6\*.** Сумма трёх различных наименьших делителей некоторого числа *A* равна 8. На сколько нулей может оканчиваться число *A*?

**Задача 7\*.** Докажите, что число, имеющее нечётное число делителей, является точным квадратом.

**Задача 8** **\*.** Найдите наименьшее натуральное *n*, для которого

 (*n* + 1)(*n* + 2)(*n* + 3)(*n* + 4)  делится на 1000.

**Задача 9\*** . Даны числа: 4, 14, 24, ..., 94, 104. Докажите, что из них нельзя вычеркнуть сперва одно число, затем из оставшихся ещё два, затем ещё три и, наконец, ещё четыре числа так, чтобы после каждого вычёркивания сумма оставшихся чисел делилась на 11.

**Задача 10\*.** Докажите, что все числа 10017, 100117, 1001117, ... делятся на 53.

**Задача 11\*.** Доказать, что  7 + 72 + ... + 74*K*,  где *K* - любое натуральное число, делится на 400.

**Задача 12\*** Найдите все такие числа *a*, что для любого натурального *n* число  *an*(*n* + 2)(*n* + 3)(*n* + 4)  будет целым.

**Задача 13** Назовём натуральное число *хорошим*, если среди его делителей есть ровно два простых числа.
Могут ли 18 подряд идущих натуральных чисел быть хорошими?

**Задача 14\*** . Доказать, что  11983 + 21983 + ... + 19831983  делится на  1 + ... + 1983.

**Задача 15\*** **.** Сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел оказалась кубом натурального числа. Докажите, что среднее из этих трёх чисел делится на 4.

**Решения к задачам**

**Решение задачи 1:** Поскольку 300 и 198 делятся на 6, Петя сможет снять лишь сумму, кратную 6 долларам. Максимальное число, кратное 6 и не превосходящее 500, - это 498.

Докажем, что снять 498 долларов возможно. Произведем следующие операции: 500-300=200, 200+198=398, 398-300=98, 98+198=296, 296+198=494. Сумма, лежащая в банке, уменьшилась на 6 долларов.

Проделав аналогичную процедуру 16 раз, Петя снимет 96 долларов. Затем он может снять 300, положить 198 и снова снять 300. В результате у него будет 498 долларов.

**Решение задачи 2:** Пусть a=2000m+n, b=2000n+m, d - наибольший общий делитель a и b. Тогда d делит также числа

2000a-b=(20002-1)m и 2000b-a=(20002-1)n.

Поскольку m и n взаимно просты, то d делит 20002-1. С другой стороны, при m=20002-2000-1, n=1, получаем a=(20002-1)(2000-1), b=20002-1=d.

**Ответ: 20002-1.**

**Решение задачи 3:** Среди этих трёх чисел есть хотя бы одно чётное число. Значит, в разложении произведения на простые множители есть множитель 2.
  Среди этих трёх чисел одно число делится на 3. Значит, в разложении произведения на простые множители есть множитель 3.
  В разложении произведения на простые множители есть простые числа 2 и 3. Значит, оно делится на их произведение, то есть на 6.

Последняя цифра

1) Найти последнюю цифру чисел 320, 2748, 50863.

2) Какой цифрой оканчивается произведение 222 двоек?

3) Какой цифрой оканчивается (99)9?

4) Какой цифрой оканчивается 440?

5) Число 7 возведено в седьмую степень. Полученное число снова возведено в седьмую степень и т.д. Возведение повторено 1000 раз. Какой цифрой оканчивается полученное число?

6) Докажите, что 116+146-133 кратно 10.

7) Лист бумаги разрезали на 4 части. Затем каждый лист разрезали на 4 части и т.д. Докажите, что после 26 разрезания полученные листы без одного можно делить поровну на 5 групп.